ACTES DE LA V TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2000), 433-438

L'ÀLGEBRA I LA GEOMETRIA A PIETRO MENGOLI (1625-1686)

Mª Rosa Massa Esteve
Centre d'Estudis d'Història de les Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona

Paraules clau: *Mengoli, àlgebra, geometria, segle XVII.*

The algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625-1686)

Summary: *In the seventeenth-century in the field of mathematics one of the novelties was the merging of algebra and geometry. In this paper the author describes the relations between algebra and geometry in the works of Pietro Mengoli, mathematician from the seventeenth-century.*

Key words: *Mengoli, algebra, geometry, seventeenth-century.*

1. L'àlgebra i la geometria en el segle XVII

Una de les principals novetats matemàtiques en el segle XVII és l'articulació de l'àlgebra i la geometria. Els dos grans avenços del segle, la geometria analítica i el càlcul infinitesimal, obtenen el seu excepcional poder de l'establiment de correspondències entre fórmules i figures, entre càlculs simbòlics algebraics i operacions geomètriques i construccions.[1]

L'aparició d'*In artem analyticem isagoge* (1591) de Viète (1540-1603) va fer palès l'avantatge d'utilitzar símbols dins la matemàtica no només per representar la incògnita, sinó també per les quantitats conegudes, d'aquesta manera es podia treballar amb equacions en forma general. Viète va posar també en connexió l'àlgebra i la geometria determinant les equacions que corresponen a diverses construccions geomètriques. El procés iniciat per Bombelli (*Algebra*, 1572), Viète, Ghetaldi (*Variorum problematum collectio*, 1607), Fermat (*Varia Opera mathematica*, 1679) i Descartes (*Geometriae*, 1637) va seguir al llarg del segle XVII i molts matemàtics, entre ells Mengoli (1625-1686), van contribuir-hi amb les seves obres. Se-

[1] Aquesta fusió de l'àlgebra i la geometria no podem explicar-la únicament per tendències internes de desenvolupament o necessitat de les matemàtiques en aquell temps; més aviat, per entendre el procés correctament i jutjar la seva importància històrica, l'historiador hauria d'incloure en la seva consideració el desenvolupament en altres àrees intel·lectuals. (Mahoney, 1980: 142)

gons Bos:[2] «El període, els protagonistes i el procés havien rebut poca atenció per part dels historiadors de la matemàtica però en els últims anys existeix una línia d'investigació on s'intenta entendre el procés en el seu propi context, en termes de coneixement matemàtic i de les intencions amb què es treballava més que en termes del que succeirà després». Existeix, per tant, un important debat historiogràfic sobre aquest tema on queda emmarcada aquesta recerca.

En els apartats següents ens proposem aclarir el que l'obra de Mengoli, matemàtic deixeble de Cavalieri, volia aportar a aquest procés de la fusió de l'àlgebra amb la geometria a partir de l'anàlisi dels mètodes algebraics que utilitza per arribar als seus resultats, de com presenta el llenguatge «especiós» o simbòlic, de com opera amb les lletres i de com empra les expressions algebraiques en la geometria.

2. Fonts algebraiques de Mengoli[3]

Quan l'àlgebra es va introduir dins les matemàtiques Mengoli es trobava a Bolonya. Per saber la possible difusió de l'àlgebra a Itàlia ens referirem a un estudi de Luigi Pepe sobre aquest tema. Pepe (1982: 261) remarca que així com Viète estava present en les obres dels italians, la *Géométrie* (1637) de Descartes, va tenir poca difusió a Itàlia. Pepe (1982: 263) diu haver trobat dues referències, una d'elles a Giannantonio Rocca (1607-1659), alumne del Col·legi jesuític de Parma, quan el 1640 un amic li envia la traducció de la *Géométrie* de Descartes. Mengoli s'interessa en fer quadratures a través d'un problema proposat per Rocca i, a més, manté correspondència amb ell. Deu haver conegut Mengoli aquesta obra de Descartes? Mengoli reconeix haver llegit Viète, i Hérigone, però enlloc cita Descartes. D'altra banda, les seves interpretacions algebraiques tampoc ens fan pensar que l'hagi llegit. Viète apareix citat per primera vegada al principi de la *Geometriae Speciosae Elementa,* i més tard en l'Element primer, quan parla dels símbols que utilitzarà, Mengoli cita Hérigone i Beaugrand (1595-1640) que defineix com «analistes» a imitar.

L'obra d'Hérigone *Cursus mathematicus* (Paris, 1634) consta de sis volums entre els quals n'hi ha un d'àlgebra. Cifoletti (1990: 129) diu que aquesta obra era molt coneguda en l'època i sovint citada per Fermat, Mersenne, Cavalieri, etc. També afirma Cifoletti (1990: 160) que «com a manual d'àlgebra va quedar molt elemental i va servir només a les primeres generacions d'algebristes: el perquè del seu renom és degut sobretot al seu caràcter enciclopèdic i al llenguatge universal». També Mahoney (1980: 28) ha fet notar que la secció d'àlgebra d'Hérigone del *Cursus mathematicus* pren les seves paraules directament de Viète, però no n'adopta el simbolisme ni l'esperit.

Beaugrand, l'altre «analista» que cita Mengoli, va publicar a París el 1631 *In artem analyticem Isagoge* de Viète amb uns escolis i un compendi matemàtic. En la *Geometriae Speciosae Elementa,* quan empra el mètode dels indivisibles de Cavalieri, Mengoli diu que ho farà amb àlgebra que és més fàcil i cita un lema de Beaugrand. En el *Circolo*, quan explica les

[2] Aquestes paraules les va dir en el simposi titulat: *Algebra and Geometry around 1600* al XIXTH International Congress of History of Science a Saragossa, el 1993.

[3] Sobre la vida i obres de Pietro Mengoli podeu veure Massa (1995, 1997 i 1998).

taules, Mengoli cita Viète i el seu llibre *Ad angulares sectionem*. Això ens fa pensar que bé sigui a través de l'obra d'Hérigone, a través de la de Beaugrand o bé directament, Mengoli coneixia bé l'obra de Viète.

3. El llenguatge especiós de Mengoli

El 1655 Mengoli escriu en vers una obra dedicada a la Reina Cristina de Suècia on li explica una «via reial» per entendre les matemàtiques, *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam, & Planimetriam, ornata Maiestatae Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum* (Bolonya, 1655). En aquesta obra Mengoli divideix les matemàtiques en tres parts: l'aritmètica, on explica les operacions amb els nombres, fins i tot les taules triangulars; l'àlgebra especiosa, on explica com utilitzar les lletres per resoldre equacions i en fa una classificació fins al tercer grau; i la planimetria, on tracta de figures planes i les seves propietats. Al començament de la segona part, l'àlgebra especiosa, Mengoli explica la utilitat d'aquest art:

> Una sola entre les Matemàtiques s'anomenarà Algebra Especiosa, un art en el qual res s'amaga al que investiga. Si preguntes, si és o no és, consisteix en dir la veritat; si preguntes quant és, aquest art ho fa prou. Ja que als nombres genèrics [aquest art] els proporciona maneres aptes per fer i per provar les coses fetes i dites. Així és a saber que hi intervindran dos tipus de nombres generals, aquells que busques [incògnites] i aquells que pots donar [dades] arbitràriament. (Mengoli, 1655: 19)

Mengoli, igual que Viète, explica que representarà els nombres amb lletres, però Mengoli presenta l'àlgebra com un llenguatge i compara metafòricament les figures lingüístiques amb les figures algebraiques. Així, les consonants representen dades; les vocals, incògnites; les síl·labes, expressions algebraiques d'una sola lletra; els signes de puntuació, les regles d'addició, substracció, etc.; les paraules, expressions algebraiques de vàries lletres; els textos, igualtats; els versos, equacions. Mengoli no posa cap exemple amb lletres ni amb nombres d'aquestes comparacions metafòriques, només explicacions. Dóna les propietats de les igualtats: sumant, restant, multiplicant, dividint pels mateixos nombres els dos membres, la igualtat no varia. També elevant al mateix nombre i traient la mateixa arrel als dos membres s'obté la mateixa igualtat. Defineix raó i proporció, igualtat absurda o indeterminada i falsa o incompatible. Tot seguit passa a intentar resoldre l'equació i explica que pot ser indeterminada o incompatible, però que si no és cap d'aquests dos casos sempre trobarem solució. Mengoli fa també una mesura numerosa i especiosa de les equacions. Explica que les equacions de segon grau es poden transformar fàcilment en una de primer grau i que algunes de tercer grau també es poden transformar en equacions de segon grau. Finalment fa una classificació de les equacions fins a tercer grau segons el grau i segons els signes. Tanmateix la classificació de Viète és més completa, hi ha coincidències en les paraules emprades: *antithesis*, que vol dir transposició de termes de l'equació; *subgraduales*, que vol dir que tenen un grau més petit que el de l'equació, etc. L'originalitat de Mengoli en aquesta primera obra és presentar explícitament l'àlgebra com un llenguatge per poder fer matemàtiques establint comparacions metafòriques amb el llenguatge que utilitzem per escriure.

Quatre anys més tard Mengoli escriu la *Geometriae Speciosae Elementa* que podem traduir per *Elements de geometria especiosa*. Mengoli ja remarca en el títol que està utilitzant l'àlgebra especiosa en la geometria i l'anomena *Geometria Especiosa*.

Aquí, Mengoli torna a donar tots els signes i és consistent amb la seva primera obra. Si els comparem amb els definits per Viète trobem algunes diferències. Per exemple, Mengoli representa el símbol igual amb dos punts, en canvi Viète (1983: 19) el representa amb una abreviació de la paraula *aequalis*. Per multiplicar, Viète empra la paraula *in,* mentre que Mengoli, per expressar el producte, escriu una lletra al costat de l'altra. Així mateix, en aquest llibre, a diferència de Viète, Mengoli no distingeix entre vocals i consonants que poden representar indistintament dades, incògnites i variables.

Utilitza minúscules i majúscules; generalment les minúscules representen dades i les majúscules variables però Mengoli no és totalment consistent amb aquesta idea. Dóna noms a les lletres i expressions utilitzades, segons ell, per Viète, Hérigone i Beaugrand. Alguns noms coincideixen, com ara la paraula *radix,* que, tant per Viète (1983: 30) com per Mengoli, representen la primera potència [base], altres són totalment originals de Mengoli, *triprimam, unisextam,* etc. Viète reté en les potències la paraula, per exemple, *A quadratus, A cubus...* Descartes en canvi escriu els nombres a dalt tal com fem ara. Mengoli no escriu paraules com Viète però tampoc posa els nombres a dalt com Descartes, els escriu al costat, com Hérigone.

Pel que fa a la formació de les potències, Mengoli igual que Viète (1983: 1) i Descartes (1954: 5) observa que les successives potències d'incògnites constitueixen una proporció contínua:

$1:a = a : a^2 = a^2 : a^3 = \ldots$

Viète i Descartes ho expliquen amb paraules, tanmateix Descartes i Mengoli parteixen de la unitat i Viète no.

Les grans novetats aportades per Mengoli al llenguatge algebraic es troben en la manipulació d'aquest llenguatge especiós. Mengoli, a més de les operacions conegudes, s'inventa una manera de fer i d'escriure els sumatoris finits. No escriu les sumes de potències, donant valors o bé escrivint els nombres amb el signe + i punts suspensius, sinó que representa els nombres amb lletres i s'inventa una construcció original i avantatjosa que li permet fer el càlcul d'aquests sumatoris. A la *Geometriae Speciosae Elementa* defineix aquests sumatoris i els anomena «espècies»[4].

> Anomenem espècie a un sumatori qualsevol, en el qual se sumen totes les abscisses de cada una de les totes, anomenades proporcionals; i anomenem taula especiosa a les espècies ordenades en una taula triangular similar a la taula proporcional (Mengoli, 1659: 59).

Per altra banda, Mengoli aplica l'àlgebra a les taules triangulars per generalitzar i aprofita les propietats dels nombres combinatoris per trobar aquestes sumes de potències. Posa el desenvolupament binomial en forma de taula triangular i així es pot estendre a qualsevol potència natural. Mengoli també aplica l'àlgebra quan fa la seva teoria de quasi proporcions. La idea que les lletres, a més d'un nombre fix o una incògnita, poden representar varia-

[4] Hi ha diferents interpretacions sobre la paraula espècies a la traducció de l'obra de Viète, (1983: 13). Relacionada amb la paraula espècies la frase logística especiosa o numerosa no l'he trobada a Mengoli. Sobre aquesta expressió vegeu també la traducció de Viète (1983: 17).

bles, és a dir nombres indeterminats però determinables, permet a Mengoli calcular el valor de quasi raons entre expressions algebraiques quan el valor de les lletres va augmentant. Així, la quasi raó que empra després per fer quadratures no depèn dels valors donats a les lletres que serveixen per qualsevol potència natural ja que les raons s'estableixen a través dels graus de les expressions algebraiques.

4. Compatibilitat de l'àlgebra i la geometria

Com aplica Mengoli l'àlgebra a la geometria? Com treballa amb les figures?

Mengoli intenta que quedi clara la seva aplicació de l'àlgebra a la geometria i s'entreté moltíssim en intentar identificar les figures que vol quadrar amb les expressions algebraiques que utilitza per representar-les. Dóna el seu sistema de coordenades i descriu individualment les ordenades de les figures a través de les abscisses. Les ordenades d'aquestes figures les obté per mitjanes proporcionals o terceres proporcionals, és a dir, el lligam entre la figura i l'equació és la teoria de proporcions d'Euclides. Quan fa les demostracions de les propietats de les corbes que descriuen la figura (creixent, punt màxim...), Mengoli utilitza directament l'expressió algebraica i les propietats de les proporcions sense preocupar-se de la representació de la figura.

Mengoli, a més, col·loca aquestes expressions algebraiques en taules triangulars per fer alhora totes les quadratures de les figures que descriuen quan els exponents són naturals. Multiplica aquestes expressions algebraiques per dos factors que troba fàcilment ja que només depenen del grau de l'expressió algebraica i únicament li queda demostrar que totes les quadratures són iguals a la del quadrat de costat u. L'àlgebra permet a Mengoli trobar alhora infinites quadratures i no li cal fer cada vegada la quadratura d'una corba per trobar una regla que el permeti generalitzar.

Mengoli no fa quasi cap dibuix d'aquestes figures i en el cas de la quadratura del cercle no fa ni un dibuix en tota l'obra, encara que queda clar que sap quin és el dibuix de cadascuna de les figures.

Mengoli no fa, com Descartes, una àlgebra de segments, és a dir, no interpreta geomètricament cadascuna de les operacions algebraiques que defineix, fins i tot quan demostra la igualtat $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ho fa a través de les propietats de les proporcions. Mengoli té més similituds amb Viète que també utilitza la teoria de proporcions com a lligam entre l'àlgebra i la geometria, però Viète fa diagrames sense establir un sistema de coordenades, comprova les construccions però no estableix relacions entre les ordenades i les abscisses.

Mengoli, a més, classifica les figures en dos tipus, segons estiguin situades en els costats primer i últim de la taula triangular o bé al mig, i dóna les seves propietats fent les demostracions amb la teoria de proporcions. Al final, fa una altra classificació de les figures segons el lloc de la taula i especifica com serà el seu dibuix, quin angle formen, quin és el baricentre, encara que no ho demostra. En el *Circolo,* quan fa la taula de quadratures de figures interpolades, Mengoli classifica també les quadratures trobades segons el lloc i el grau en quadratures de primera classe, segona classe i tercera classe. Encara que quan hom observa l'obra del *Circolo* no sembla que tracti de quadratures de figures geomètriques ja que només s'hi troben taules triangulars i càlculs de productes infinits per trobar pi.

El fet de representar els nombres i les variables amb lletres i buscar artilugis per operar amb elles i poder «generalitzar», ho interpretem com una resposta a la necessitat mengoliana de resoldre molts problemes matemàtics alhora. Mengoli troba l'eina generalitzadora en les taules triangulars i en l'àlgebra, ja que les taules es poden estendre indefinidament, són fàcils de construir i les lletres li permeten identificar les figures dins la taula. La utilització de l'àlgebra en les quadratures de Mengoli és un tret característic i fonamental, que ell mateix ja remarca al principi de la *Geometriae Speciosae Elementa*:

> Ambdues geometries, l'antiga d'Arquimedes i la nova dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri (preceptor meu), així com també l'àlgebra de Viète, han estat tractades amb bastant encert per persones cultes; d'elles, ni confusament ni com si fos una barreja, sinó per una perfecta conjunció, en resulta una de nova, l'espècie pròpia del nostre treball, que no podrà desagradar ningú. (Mengoli,1659: 2)

Mengoli és un bon exemple dels matemàtics del segle XVII que estan en la línia de considerar l'àlgebra un bon complement de la geometria.

Bibliografia

CIFOLETTI, G. (1990), «La méthode de Fermat: son statut et sa difussion», *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nouvelle série*, 33, Paris, Société française d'histoire des sciences et des techniques.

DESCARTES, R. (1954), *The Geometry of René Descartes*, D. E. Smith i M. L. Latham ed., Nova York, Dover.

MAHONEY, M. S. (1980), «The beginnings of algebraical thought in the seventeenth century». A: *Descartes' philosophy, mathematics and physics,* Gaukroger, S., ed., Totowa / Brighton, Barnes and Noble / Harvester, 141-156.

MAHONEY, M. S. (1973), *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton, Princeton University Press.

MASSA, M. R. (1995), «Les quasi proporcions de Mengoli i el concepte de límit en el segle XVII». A: PUIG-PLA, C. et al. (coord): *Actes de les III Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica als Països Catalans (Barcelona, SHCT),* 232-240.

MASSA, M. R. (1997), «Mengoli on «Quasi Proportions»», *Historia Mathematica, 24*, 2, 257-280.

MASSA, M. R. (1998), «La quadratura del cercle de Pietro Mengoli (1625-1686)». A: BLANES, G. et al. (coord), *Actes de les IV Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica (Alcoi-Barcelona, SHCT),* 571-578.

MENGOLI, P. (1655), *Via regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam et Planimetriam ornata, Maiestati Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum,* Bolonya.

MENGOLI, P. (1659), *Geometriae Speciosae Elementa*, Bolonya.

MENGOLI, P. (1672), *Circolo*, Bolonya.

NATUCCI, A. (1971), «Mengoli». A: *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), New York, vol. 9, 303-304.

PEPE, L. (1982), «Note sulla diffusione della *Géométrie* di Descartes in Italia nel secolo XVII», *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, vol. II, fasc. 2, 249-288.

VIETE, F. (1983), *The Analytic Art*, T. R. Witmer tr., Kent, Ohio, Kent State University Press.